2.2.1 Rollen mit verschiedenem Trägheitsmoment ******

1 Motivation

Dieser Versuch zeigt, dass nicht die Masse, sondern das Trägheitsmoment J die Trägheit bei der Kreisbewegung bestimmt.

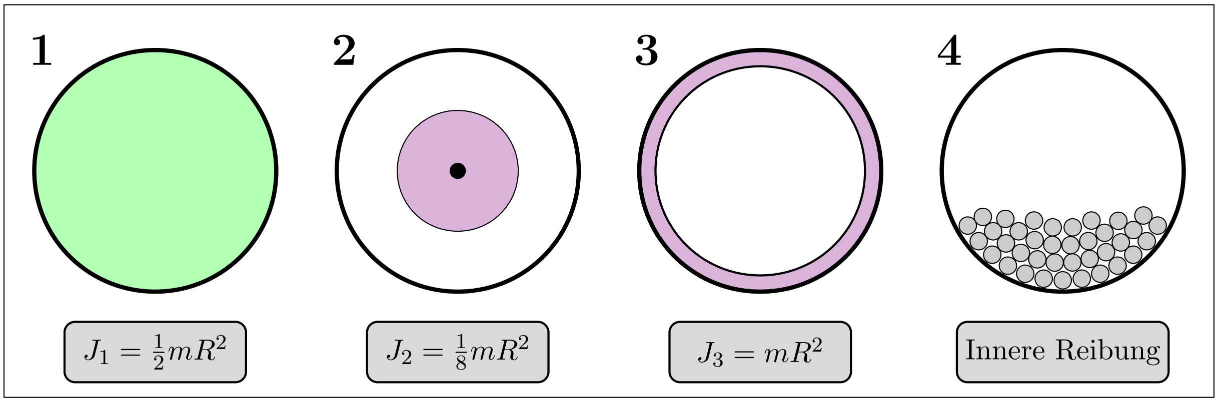

Abbildung 1: Vier Zylinder gleicher Masse und gleicher äusserer Abmessungen (Radius R), aber unterschiedlicher Massenverteilung. **1**: Aluminium-Vollzylinder, **2**: Blei-Vollzylinder, **3**: Blei-Hohlzylinder, **4**: mit Bleischrot gefüllter Aluminium-Hohlzylinder

2 Experiment

Man lässt vier zylindrische Körper gleicher Masse m und mit gleichen äusseren Abmessungen gleichzeitig eine schiefe Ebene hinabrollen. Drei der Zylinder sind starre Körper (**1**: Aluminium-Vollzylinder, **2**: Aluminium-Hohlzylinder mit Bleizylinder in der Mitte und **3**: Aluminium-Hohlzylinder mit Blei-Hohlzylinder innen (siehe Abb. 1); **4**: Dieser Aluminium-Zylinder enthält Bleischrot.

Mit einer Balkenwaage wird nachgewiesen, dass die Zylinder gleich schwer sind (siehe Abb. 2). Sie weisen ausserdem eine Unterseite aus Aluminium aus, so dass die Studenten beim Zylinderwettrennen nichts über die innere Struktur der Zylinder wissen. Je kleiner das Trägheitsmoment eines Zylinders, desto schneller ist er am Ziel. Der schrotgefüllte Zylinder bleibt mitten auf der Strecke liegen.

3 Theorie

Wir betrachten ein Rad oder einen Zylinder mit dem Radius R, der auf einer schiefen Ebene abrollt (siehe Abb. 3). Da das Rad nicht gleitet, gilt:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{R}) \tag{1}$$
$$v = R \cdot \omega \,, \tag{2}$$

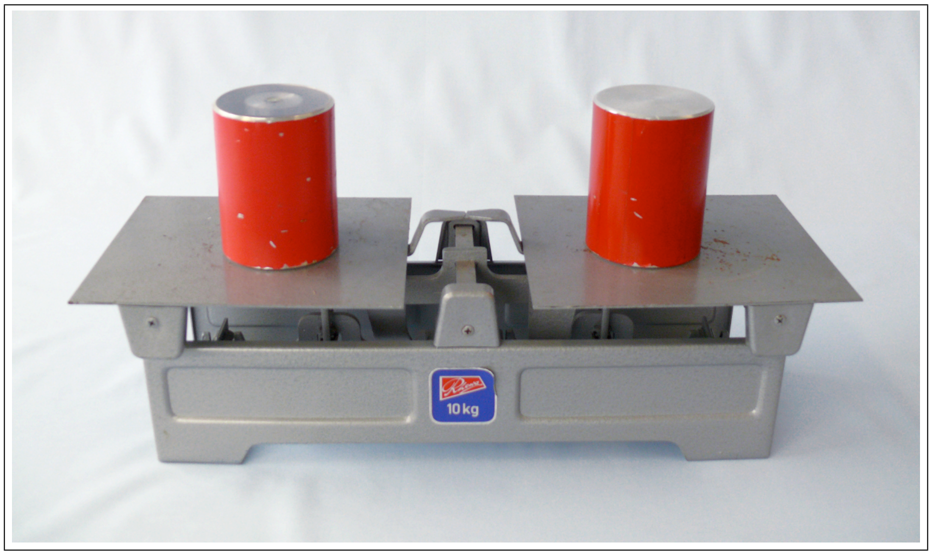

Abbildung 2: Nachweis der gleichen Masse

wobei $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades und $\boldsymbol{v}$ die Translationsgeschwindigkeit des Zentrums **Z** ist. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes **P** erhalten wir, indem wir die Vektoren der Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, wobei $\boldsymbol{r}$ der vom Zentrum aus genommene Ortsvektor von **P** ist, addieren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \\ &= -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \end{aligned} \tag{3}$$

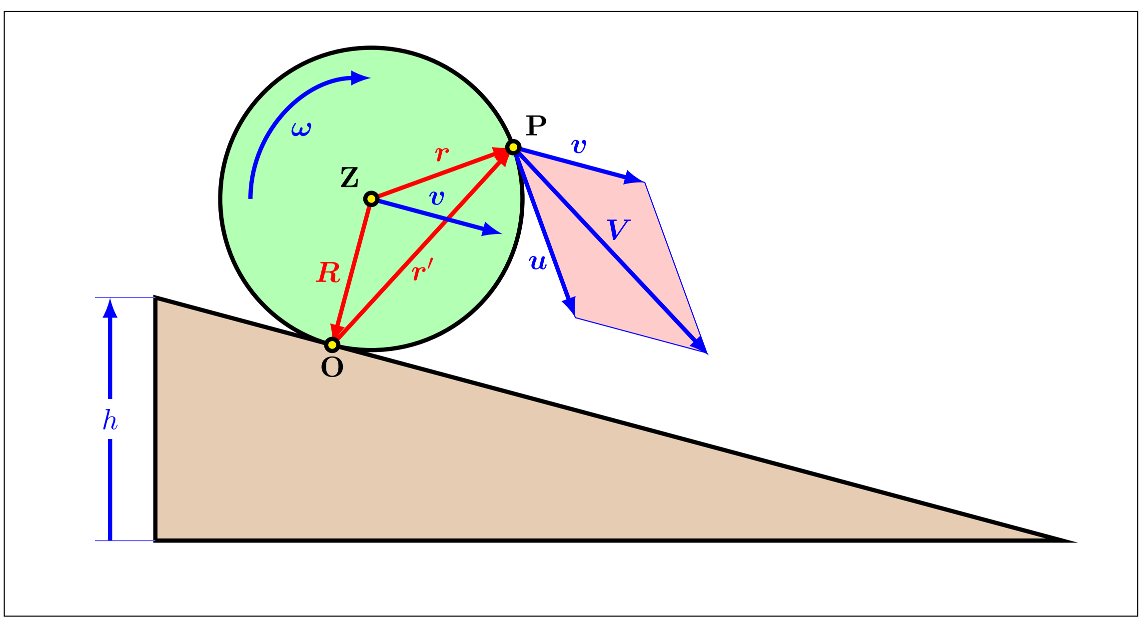

Abbildung 3: Rad auf schiefer Ebene

Die Umformung zeigt, dass wir diesen Ausdruck auch anders deuten können: Das Rad dreht sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um das momentane Drehzentrum **O** (den Auflagepunkt); die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes erhalten wir aus $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$, wobei $\boldsymbol{r}'$ der Ortsvektor von P bezüglich **O** ist.

Falls die Reibung vernachlässigt werden kann, können wir die Geschwindigkeit des Rades v aus dem Energiesatz leicht ableiten:

- Bezüglich des Schwerpunktes gilt (falls das Rad aus der Ruhe die Höhe h durchrollt hat):

  $$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 \tag{4}$$

  Wir müssen also die kinetische Energieen sowohl der Translation als auch der Rotation um den Schwerpunkt berücksichtigen.

- Bezüglich des momentanen Drehzentrums **O** haben wir hingegen nur eine Rotation, und wir erhalten:

  $$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,J'\omega^2 \;, \tag{5}$$

  wobei J' das Trägheitsmoment um die Achse durch den Punkt **O** ist.

Nach dem Satz von Steiner gilt:

$$J' = m\,R^2 + J \tag{6}$$

und somit

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,R^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 \tag{7}$$

Das ist natürlich das gleiche Resultat wie oben[1] (Gl. 4). Bei einem Rad, bei welchem die Masse zum grössten Teil auf dem Umfang konzentriert ist, gilt $J \approx m\,R^2$, bei einem homogenen Zylinder $J = m\,R^2/2$, und bei einem Körper, dessen Masse in der Nähe des Zentrums konzentriert ist, $J \ll m\,R^2$. Falls wir $J := c \cdot (m\,R^2)$ definieren, erhalten wir:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,c\,m\,R^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,(1+c)\,m\,v^2 \tag{8}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+c}}} \tag{9}$$

Ein mit Sand oder Bleischrot gefüllter Hohlzylinder zeigt aber, dass wir mit der Anwendung des mechanischen Energiesatzes vorsichtig sein müssen. In diesem Fall wird die potentielle Energie $m\,g\,h$ nur zum Teil in sichtbare kinetische Energie verwandelt, ein anderer Teil erwärmt (durch Reibung) die Sandkörner im Innern!

[1] Womit wir nachträglich den Satz von Steiner bewiesen haben!